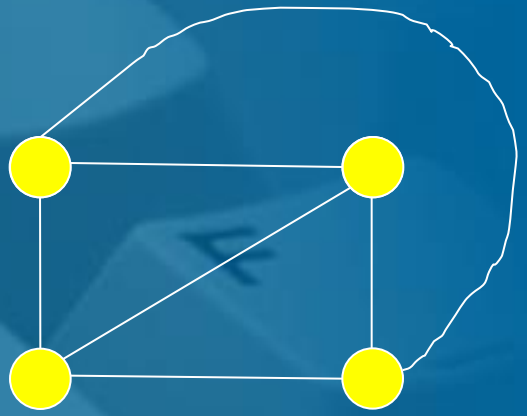
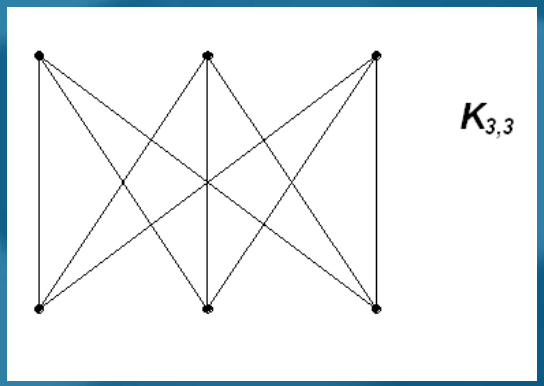
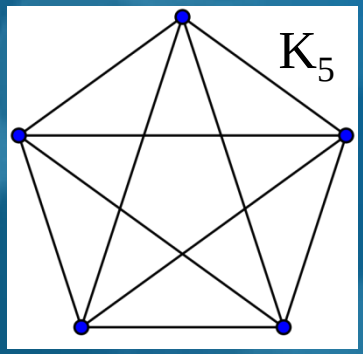
K_4 è planare?



Sì!

E $K_{3,3}$ e K_5 sono planari?

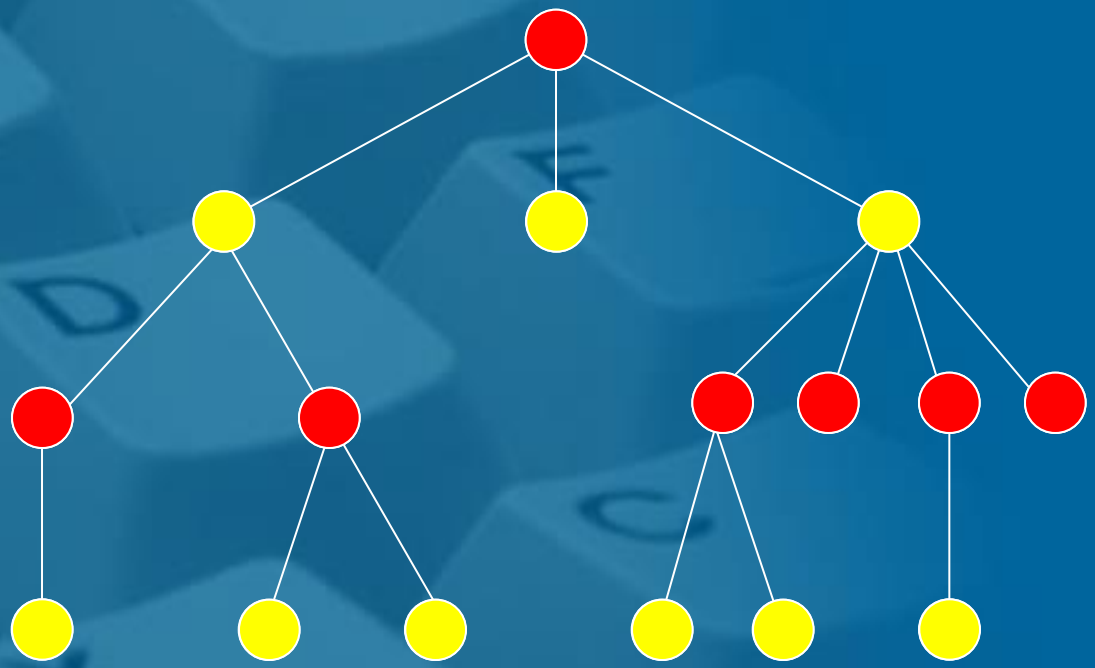




No! (Teorema di Kuratowski)

Un albero è un grafo bipartito?

SÌ!



Ma un grafo bipartito è sempre un albero??

Algoritmi e Strutture Dati

Capitolo 11
Visite di grafi

Scopo e tipi di visita

- Una visita (o attraversamento) di un grafo G permette di esaminare i nodi e gli archi di G in modo sistematico; ad esempio, un cammino euleriano è un modo particolare di visitare un grafo (euleriano!) in cui si passa una e una sola volta su ogni arco di G
- Problema di base in molte applicazioni
- Esistono vari tipi di visite con diverse proprietà: in particolare, vedremo la visita in ampiezza (BFS=breadth first search) e la visita in profondità (DFS=depth first search)

Componenti connesse di un grafo

- Ricordiamo che un grafo si dice connesso se per ogni coppia di vertici esiste un cammino che li congiunge
- Ogni grafo può essere partizionato in una o più componenti connesse massimali, ovvero sottografi connessi che non sono congiunti da alcun arco
- La visita di un grafo in realtà visita una dopo l'altra le componenti connesse del grafo stesso; per semplicità assumeremo nel seguito che il grafo sia connesso

Algoritmo di visita generica

- La visita parte da un vertice s qualsiasi ed esplora seguendo una qualche regola uno dei suoi adiacenti
- Al generico passo di visita, se un vertice v viene scoperto per la prima volta mediante l'arco (u,v), esso viene marcato come visitato, e viene quindi aggiunto alla frangia F di visita, la quale contiene tutti i nodi da cui la visita può proseguire; inoltre, il nodo u diventa padre di v, e l'arco (u,v) viene etichettato come arco di visita
- Un vertice rimane nella frangia di visita fintantoché non sono stati scoperti tutti i suoi adiacenti
- Se il grafo è connesso (come abbiamo ipotizzato), la visita genera un albero di copertura T del grafo, costituito da tutti i nodi del grafo e dagli archi di visita

Visite particolari

- Se la frangia F è implementata come una coda (cioè, quando un vertice si trova in testa alla coda, vengono visitati tutti i suoi adiacenti, si aggiungono alla coda i neo-visitati, e infine il vertice esce dalla frangia) si ha la visita in ampiezza (BFS)
- Se la frangia F è implementata come una pila (cioè, quando un vertice si trova in cima alla pila, viene visitato un vertice adiacente non ancora visitato, il quale viene aggiunto in cima alla pila e subito utilizzato per proseguire nella visita) si ha la visita in profondità (DFS)

Visita in ampiezza

Visita in ampiezza

```
algoritmo visitaBFS(vertice s) → albero
1.    rendi tutti i vertici non marcati
2.    T ← albero formato da un solo nodo s
3.    Coda F
4.    marca il vertice s
5.    F.enqueue(s)
6.    while ( not F.isempty() ) do
7.        u ← F.dequeue()
8.        for each ( arco (u, v) in G ) do
9.            if ( v non è ancora marcato ) then
10.               F.enqueue(v)
11.               marca il vertice v
12.               rendi u padre di v in T
13.   return T
```

Costo della visita in ampiezza

Il tempo di esecuzione dipende dalla struttura dati usata per rappresentare il grafo:

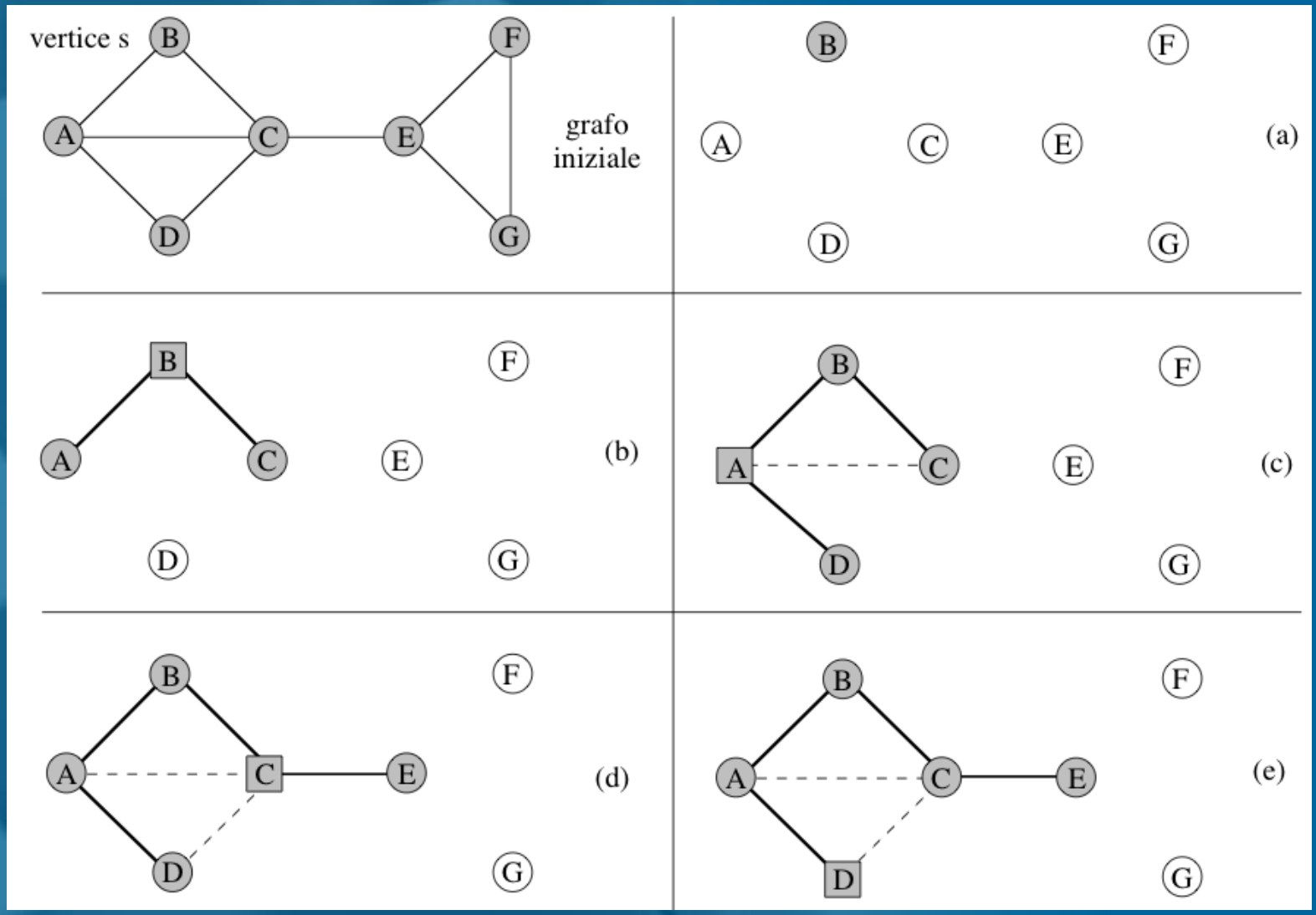
- Liste di adiacenza: $\Theta(m+n)$
- Matrice di adiacenza: $\Theta(n^2)$

Osservazioni:

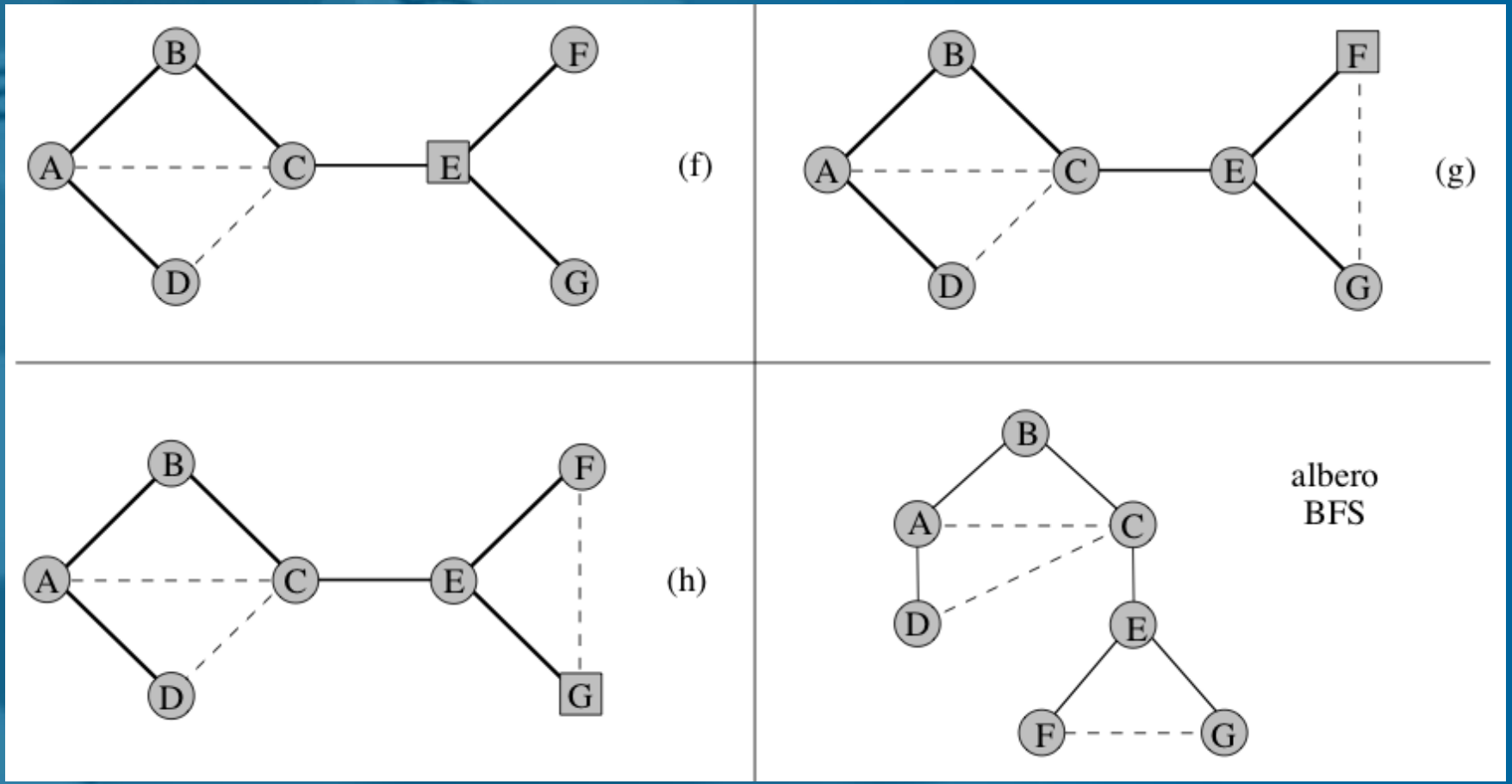
1. Si noti che se il grafo è connesso allora $m \geq n-1$ e quindi $\Theta(m+n) = \Theta(m)$
2. Ricordando che $m \leq n(n-1)/2$, si ha $\Theta(m+n) = O(n^2)$

$\Rightarrow$ per $m = o(n^2)$ la rappresentazione mediante liste di adiacenza è temporalmente più efficiente!

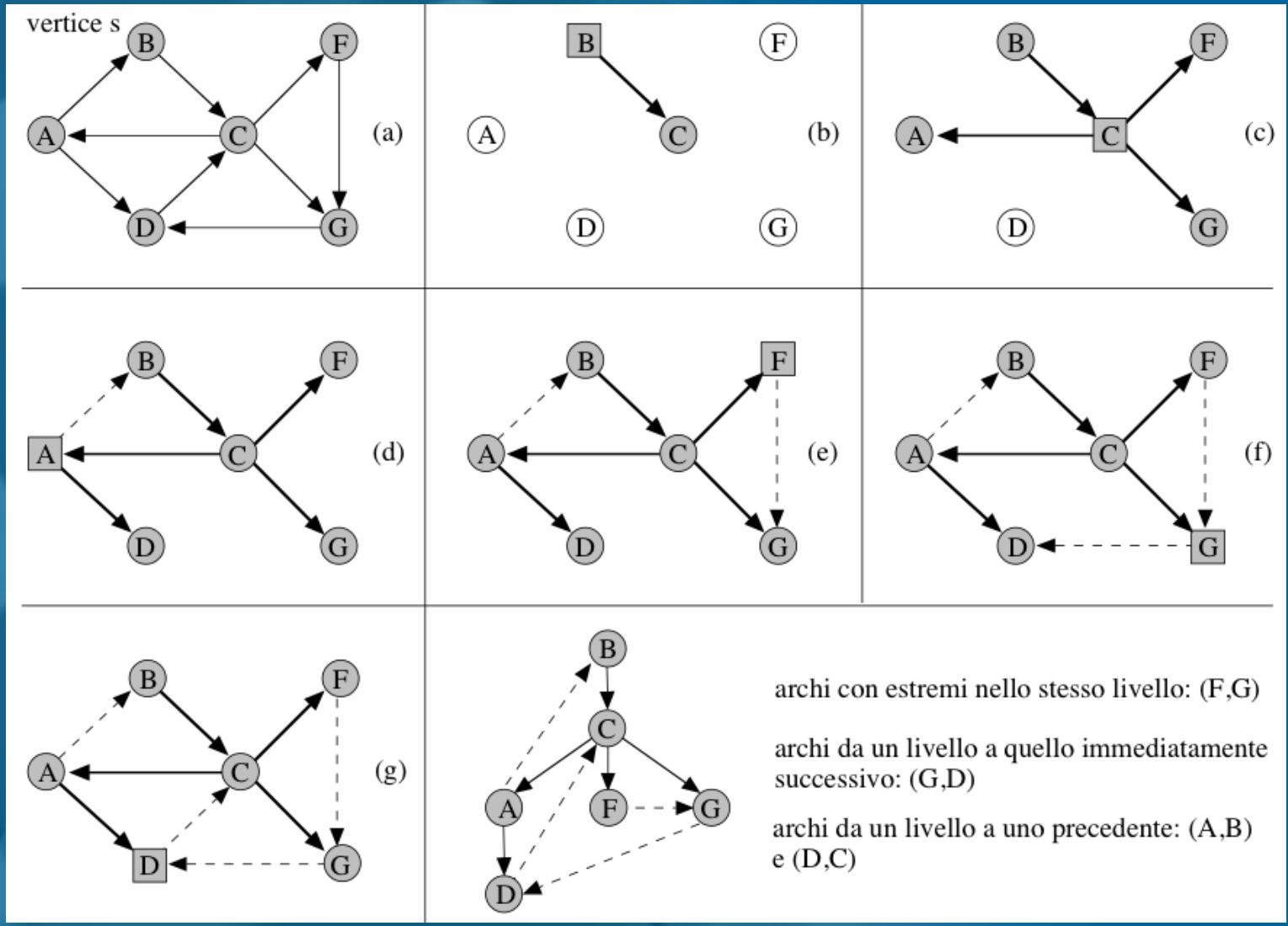
Esempio: grafo non orientato (1/2)



Esempio: grafo non orientato (2/2)



Esempio: grafo orientato



Proprietà dell'albero BFS radicato in s

- Se il grafo è non orientato, per ogni arco (u,v) di G si ha:
  - o l'arco (u,v) è un arco di T, e quindi u e v appartengono a livelli consecutivi di T, oppure
  - l'arco (u,v) non è un arco di T; in tal caso, o i nodi u e v appartengono allo stesso livello di T, oppure a livelli consecutivi
- Se il grafo è orientato, per ogni arco (u,v) si ha:
  - o l'arco (u,v) è un arco di T, e quindi u è il padre di v nell'albero, oppure
  - l'arco (u,v) non è un arco di T; in tal caso, o i nodi u e v appartengono allo stesso livello di T, oppure u è a livello immediatamente superiore di v, oppure infine u è su qualche livello arbitrariamente più in basso di quello di v
- Dalle osservazioni precedenti, per ogni nodo v, il livello di v nell'albero BFS T è pari alla distanza di v dalla sorgente s (sia per grafi orientati che non orientati)

Visita in profondità

Visita in profondità

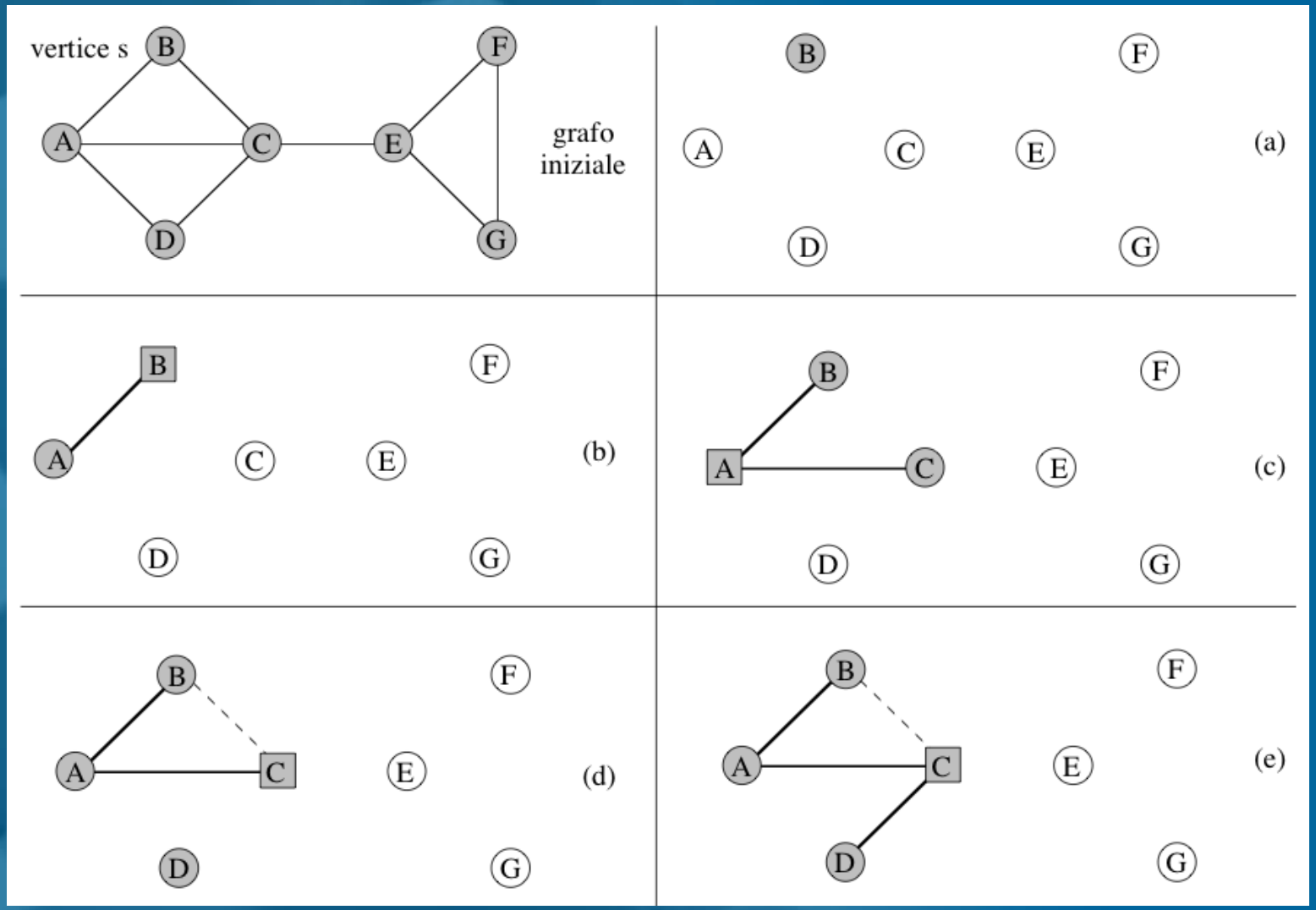
```
    procedura visitaDFSRicorsiva(vertice v, albero T)
1.      marca e visita il vertice v
2.      for each ( arco (v, w) ) do
3.          if ( w non è marcato ) then
4.              aggiungi l'arco (v, w) all'albero T
5.              visitaDFSRicorsiva(w, T)

    algoritmo visitaDFS(vertice s) → albero
6.      T ← albero vuoto
7.      visitaDFSRicorsiva(s, T)
8.      return T
```

Costo della visita in profondità

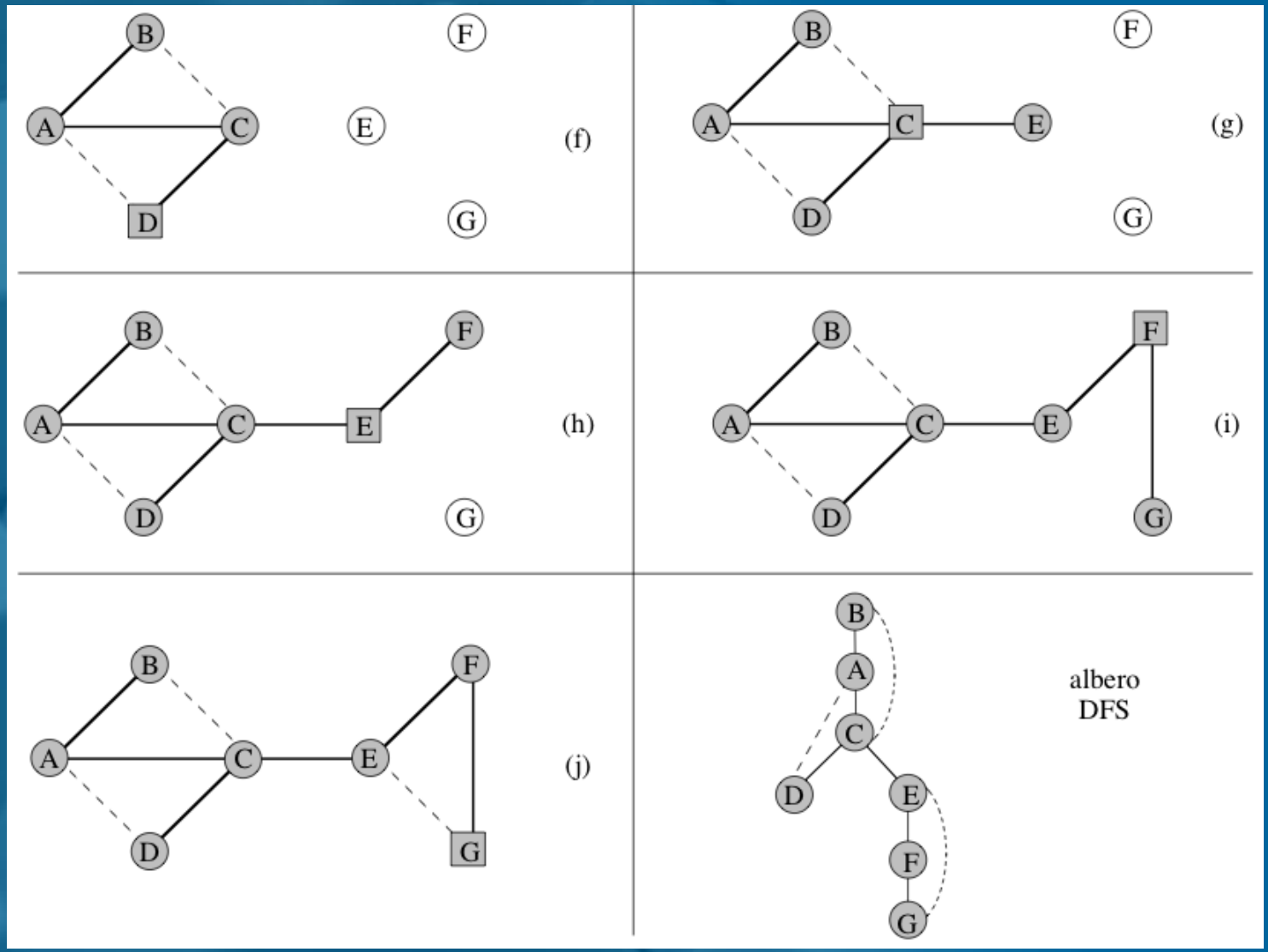
Il tempo di esecuzione dipende dalla struttura dati usata per rappresentare il grafo:

- Liste di adiacenza: $\Theta(m+n)$
- Matrice di adiacenza: $\Theta(n^2)$

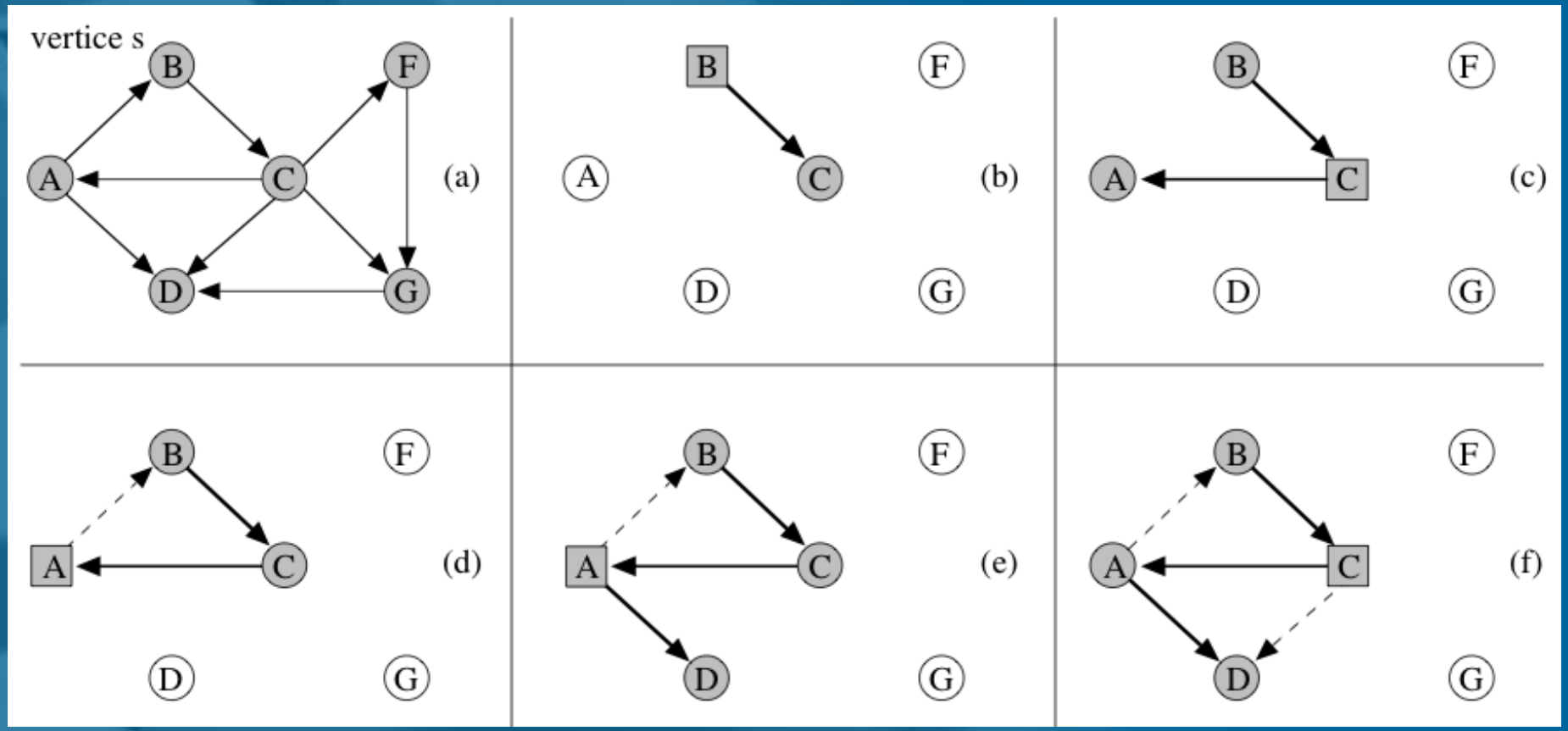
Esempio: grafo non orientato (1/2)



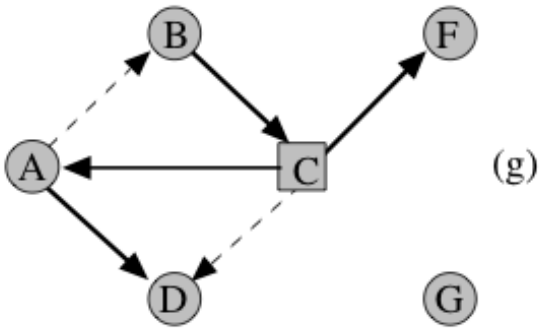
Esempio: grafo non orientato (2/2)



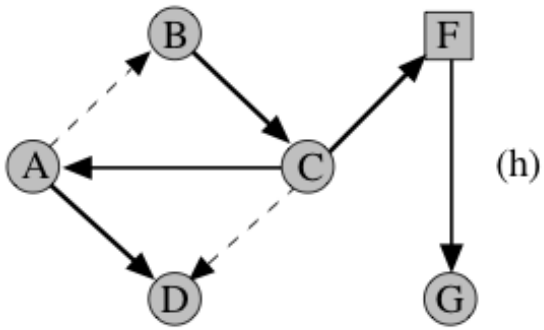
Esempio: grafo orientato (1/2)



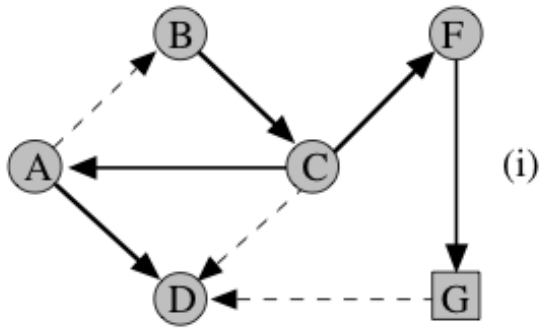
Esempio: grafo orientato (2/2)



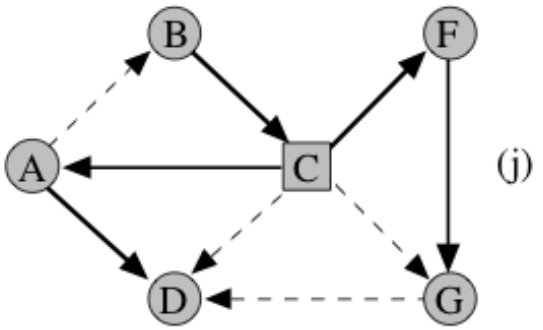
(g)



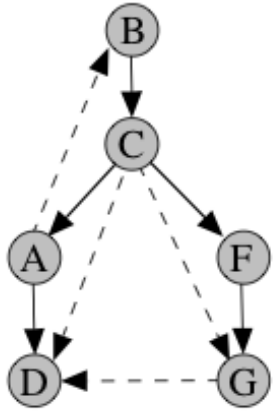
(h)



(i)



(j)



archi in avanti: (C,D) e (C,G)

archi all'indietro: (A,B)

archi trasversali a sinistra: (G,D)

Proprietà dell'albero DFS radicato in s

- Se il grafo è non orientato, per ogni arco (u,v) si ha:
  - o l'arco (u,v) è un arco dell'albero DFS T, oppure
  - l'arco (u,v) non è un arco di T; in tal caso, i nodi u e v sono l'uno discendente/antenato dell'altro in T
- Se il grafo è orientato, per ogni arco (u,v) si ha:
  - o l'arco (u,v) è un arco di T, e quindi u è il padre di v in T, oppure
  - l'arco (u,v) non è un arco di T; in tal caso, i nodi u e v sono l'uno discendente/antenato dell'altro in T, oppure (u,v) è un arco trasversale a sinistra, vale a dire il vertice v è in un sottoalbero visitato precedentemente rispetto ad u

Riepilogo

- Concetto di grafo e terminologia
- Diverse strutture dati per rappresentare grafi nella memoria di un calcolatore
- L'utilizzo di una particolare rappresentazione può avere un impatto notevole sui tempi di esecuzione di un algoritmo su grafi (ad esempio, nella visita di un grafo)
- Algoritmo di visita generica e due casi particolari: visita in ampiezza e visita in profondità

Approfondimento

Dato un grafo G=(V,E) rappresentato tramite una matrice di adiacenza A, scrivere un algoritmo che scorrendo una sola volta A:

1. Verifica se G è completo;
2. Trova il grado di G;
3. Costruisce la rappresentazione di G tramite liste di adiacenza.